

Remerciements

Dieu soit loué et cela suffit,et que les prières et la paix soient sur le bien-amié Mustafa

Et sa famille et ceux qui sont morts et après:

Loué soit Dieu qui m'a ouvert les portes du succès

Dieu soit loué,qui m'a permis de valoriser cette étape de mon parcours universitaire avec ce mémoire. c'est la fruit d'effort et de la réussite , par sa grace.II est dédié aux "Honorables parents".Que Dieu les préserve de leur vivant et perpétue eux comme une lumièrepour mon chemin,qui ont tenu à me motiver à étudier ,qui m'ont appris le sens de la patience et le sens des difficultés,à l'honorable famille et à mes soeurs.à mon professeur,le superviseur "**chadi khelifa** ", qui m'a dirigé et aidé,que Dieu bénisse :

"**Heraiz Toufik** " , "**Dechoucha Nour ddine**" et "**Touahria Messaud**", comme je n'oublie pas mes professeurs en général et à tous ceux qui m'ont enseigné une lettre et une dernière lettre à mes proches en Dieu qui ont prié pour moi pour le bien et m'ont tendu une main secourable pour moi et ont été un soutien pour moi .

Et la paix et la miséricorde et les bénédictions de Dieu soient sur vous.

Table des matières

Introduction	1
Notation	2
1 Requis et préliminaires	4
1.1 Les espaces fonctionnels et propriétés	4
1.1.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables	5
1.1.2 Théorèmes d'injection et injections compactes	8
1.1.3 Notions de base sur l'analyse non lisse	11
1.1.4 Sous-gradient de fonctions convexes	12
2 Les inclusions stationnaires et Les inéquations hémivariationnelles	17
2.1 Le résultat principal de l'existence	17
2.2 Inclusions de type sous-différentiel	21
2.3 Inéquations hémivariationnelles elliptiques	24
3 Analyse du problème de contact statique	29
3.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses	29
3.2 Formulation variationnelle	32
3.3 L'existence et l'unicité de la solution	33
Bibliographie	34

Introduction

La théorie des inégalités variationnelles a commencé au début des années soixante et a connu un développement substantiel depuis lors; voir, par exemple, [1, 2, 12] et leurs références. Les principaux ingrédients de l'étude des inégalités variationnelles sont les arguments de monotonie et de convexité, y compris les propriétés du sous-différentiel d'une fonction convexe. En revanche, la théorie des inégalités hémivariationnelles s'appuie sur des propriétés de la sous-différentielle au sens de Clarke, définies pour des fonctions localement de Lipschitz qui peuvent être non convexes. L'analyse des inégalités hémivariationnelles, y compris les résultats d'existence et d'unicité, peut être trouvée dans [9, 10, 13]. Applications des inéquations variationnelles et hémivariationnelles en mécanique et sciences de l'ingénieur, et en mécanique des contacts en particulier, se trouvent dans [13, 14], entre autres. Les inéquations variationnelles hémivariationnelles représentent une classe spéciale d'inégalités, dans lesquelles des fonctions convexes et non convexes sont impliquées. L'intérêt pour leur étude est motivé par divers problèmes de mécanique (par exemple, [10, 11]).

Le reste de la mémoire est organisé comme suit. Dans le premier chapitre, nous introduisons des notions générales pour une bonne compréhension des problèmes traités dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la classe d'inéquations hémivariationnelles à étudier, énonçons et prouvons un résultat abstrait d'existence et d'unicité. La preuve du résultat est basée sur des arguments de surjectivité pour les opérateurs pseudomonotones.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous considérons un problème de contact dans lequel le comportement du matériau est modélisé avec une loi de comportement élastique non linéaire et les conditions de contact sans frottement sont sous une forme sous-différentielle.

Le problème de contact conduit à une inéquations hémivariationnelle pour le champ de déplacement, et nous appliquons nos résultats abstraits à l'analyse du problème.

Notations

\mathbb{N}	L'ensemble des entiers positifs
N_0	L'ensemble des entiers non négatifs, c'est-à-dire $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}^d	L'espace euclidien de dimension d
S_d	L'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d
2^X	Tous les sous-ensembles d'un ensemble X
Ω	est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$ avec frontière $\Gamma = \partial\Omega$
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω , i.e., $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$
$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$	
Γ_1	La partie de la frontière où le déplacement est nul
Γ_2	La partie de la frontière où les tractions sont prescrites
Γ_3	Une partie mesurable de Γ , il représente la partie de la frontière où le contact a lieu
$A : X \longrightarrow 2^X$	Un opérateur multivalué
$D(A)$	Le domaine de A
$R(A)$	La portée de A
$Gr(A)$	le graphique de A
Div	L'opérateur de divergence pour les champs tensoriels
γ	L'opérateur de trace
Autres symboles	
C	Une constante positive générique
$\partial\varphi$	Le sous-différentiel généralisé de la fonction φ
\dot{u}	La dérivé première de f par rapport au temps
$u.v$	Le produit scalaire canonique des vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^d$
$\sigma : \tau$	Le produit interne canonique des tenseurs $\sigma, \tau \in S_d$

ν	La normale unitaire sortante à Γ
u_ν	La composante normale du vecteur u , i.e. $u_\nu = u \cdot \nu$
u_τ	La composante tangentielle du vecteur u , i.e. $u_\tau = u - u_\nu \nu$
σ_ν	La composante normale du tenseur σ , i.e. $\sigma_\nu = \sigma \nu \cdot \nu$
σ_τ	La composante tangentielle du tenseur σ , i.e. $\sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu$

Chapitre 1

Requis et préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons le matériel préliminaire dont nous avons besoin dans l'étude des inéquation hémivariationnelles. Cela concerne les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires, partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné.

Et enfin, nous présentons les définitions de base et les propriétés des opérateurs monotones et pseudomonotone (à la fois à valeur unique et à valeurs multiples), le sous-gradient d'une fonction convexe et le sous-gradient au sens de Clarke défini pour une fonction Lipschitz locale.

1.1 Les espaces fonctionnels et propriétés

Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, nous posons

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

c'est-à-dire, on dérive u , α_i fois par rapport à x_i , $i = 1, \dots, n$.

1.1.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables

L'espace $C^k(\Omega)$ Soit $k \in N_0$. Alors $C^k(\Omega)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues définies dans Ω , dont les dérivées D^α jusqu'à l'ordre k (c'est-à-dire, toutes $\alpha \in N_0^n$ telles que $|\alpha| < k$) sont continues dans Ω avec la convention de notation suivante : si $k = 0$ alors $D^k v(x) = v(x)$ pour $x \in \Omega$ et $C^k(\Omega) = C(\Omega)$. En outre

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

Soit $k \in N_0 \cup \{\infty\}$. Alors $C_0^k(\Omega)$ représente le sous-ensemble de $C^k(\Omega)$ contenant toutes les fonctions nulles dans un voisinage de $\partial\Omega$. Encore $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

L'espace $C^k(\overline{\Omega})$: Soit d'abord $k = 0$. Par $C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$ on désigne le sous-ensemble de $C(\Omega)$ contenant toutes les fonctions qui peuvent être étendues continûment sur la fermeture de Ω .

Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}$. Alors le symbole $C^k(\overline{\Omega})$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies en Ω , dont les dérivées jusqu'à l'ordre k peuvent être étendues continûment sur Ω , c'est-à-dire une fonction $u \in C^k(\overline{\Omega})$ si et seulement si pour tout $\alpha \in N_0^n$ tel que $|\alpha| < k$ il existe une fonction $v_\alpha \in C(\overline{\Omega})$ telle que

$$v_\alpha(x) = D^\alpha u(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Par souci de simplicité des notations nous écrirons $D^\alpha u$ au lieu de v_α même pour $x \in \partial\Omega$.

Nous fixons

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$$

Il est bien connu que pour tout $k \in N_0$ l'expression

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|_{C(\overline{\Omega})} \quad (1.1.1)$$

définit la norme par rapport à laquelle $C^k(\overline{\Omega})$ est complet, c'est-à-dire que $C^k(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach. On voit aussi aisément que

$$\|u_j - u\|_{C^k(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0 \text{ ssi } D^\alpha u_j \longrightarrow D^\alpha u \text{ (uniformément) en } 0 \text{ pour tout } \alpha \in N_0^n, |\alpha| < k.$$

L'espace $C^{0,1}(\overline{\Omega})$: Soit $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que u est Lipschitz dans $\overline{\Omega}$ ssi il existe une constante positive c telle que

$$\left| u(x)_j - u(y) \right| \leq c \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in \overline{\Omega}.$$

L'ensemble de toutes les fonctions continues Lipschitz en $\overline{\Omega}$ sera noté $C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $p \in [0, 1]$: Pour $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : v \text{ Lebesgue mesurable et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}$. C'est un espace de Banach, dont la norme est donné par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.2)$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |v(x)| = \inf \{c : |v(x)| \leq c\}. \quad (1.1.3.)$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Espaces de Sobolev Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev.

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [0, \infty]$ est défini comme un sous-espace de $L^p(\Omega)$ de fonctions dont toutes les dérivées généralisées jusqu'à l'ordre k appartiennent à $L^p(\Omega)$:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix} \quad (1.1.4)$$

Théorème 1.1.1. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [0, \infty]$ est complet par rapport à (1.1.4)(a) quand $p \in [0, \infty)$ et (1.1.4)(b) si $p = \infty$.

Théorème 1.1.2. (le résultat de la densité): Soit $k \in \mathbb{N}, p \in [0, \infty)$. Alors, où la fermeture est prise par rapport à la norme (1.1.4)(a).

Une des propriétés très importantes des fonctions appartenant aux espaces de Sobolev est le fait que l'on peut parler de leurs valeurs aux limites. Avant de rappeler ce fait, nous introduisons les espaces de Lebesgue $L^p(\partial\Omega)$, $p \in [0, \infty]$.

Soit \mathcal{I} une collection finie de toutes les fonctions de Lipschitz a définies dans $K_{n-1}(a)$ et décrivant complètement $\partial\Omega$. Soit $u : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\partial\Omega$. On dit que $u \in L^p(\partial\Omega)$ ssi $u(x', a(x')) \in L^p(K_{n-1}(a))$ pour tout $a \in \mathcal{I}$. Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ une partie de la frontière donnée par le graphe de $a \in \mathcal{I}$. Alors l'intégrale de surface de u le long de Γ est définie comme suit :

$$\int_{\Gamma} u ds = \int_{K_{n-1}(a)} u(x', a(x')) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a(x')}{\partial x_i} \right)^2} dx'.$$

En additionnant les intégrales sur tous les Γ , couvrant $\partial\Omega$, nous pouvons définir la valeur de $\int_{\partial\Omega} u ds$. En remplaçant u par $|u|^p$ on obtient la norme en $L^p(\partial\Omega)$ pour $p \in [0, \infty)$ avec l'extension simple pour $p = \infty$. Nous sommes maintenant prêts à formuler :

Théorème 1.1.3.{Le théorème de trace} Soit $p \in [0, \infty]$. Alors il existe une application linéaire unique $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ telle que

- $\gamma u = u$ sur $\partial\Omega$ pour tout $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$;
- $\exists c > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

L'application continue linéaire γ introduite dans le théorème précédent est appelée application de trace.

Soit $k \in \mathbb{N}, p \in [0, \infty]$. On définit l'espace de Sobolev

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

La fermeture s'entendant au sens de (1.1.4)(a) si $p \in [0, \infty)$ ou (1.1.4)(b) quand $p = \infty$. On voit aisément que $W_0^{k,p}(\Omega)$ est fermé dans $W^{k,p}(\Omega)$ et donc complet. Quand $k = 1$, la caractérisation simple suivante de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est vraie :

Théorème 1.1.4. Soit $p \in [0, \infty)$. alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Une caractérisation similaire est également vraie pour $k > 1$ à condition que la frontière $\partial\Omega$ soit suffisamment lisse.

Une attention particulière sera portée au cas où $p = 2$. Alors les espaces de Sobolev $W^{k,2}(\Omega), W_0^{k,2}(\Omega)$ sont les espaces de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{k,\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx.$$

Pour garder les notations simples, nous utiliserons les symboles $H^k(\Omega), H_0^k(\Omega)$ au lieu de $W^{k,2}(\Omega), W_0^{k,2}(\Omega)$, respectivement. La norme dans $H^k(\Omega)$ sera notée $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ au lieu de $\|\cdot\|_{k,2,\Omega}$, dans ce qui suit. Cette notation sera également étendue au cas $k = 0$, c'est-à-dire $\|\cdot\|_{0,\Omega}, (\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ représente la norme, le produit scalaire en $L^2(\Omega)$, respectivement.

1.1.2 Théorèmes d'injection et injections compactes

Soient X, Y deux espaces normés linéaires dont les normes seront notées $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$, respectivement. On écrit $X \hookrightarrow Y$ ssi $X \subset Y$ et l'injection $i : X \longrightarrow Y$ est continue de X vers Y , c'est-à-dire,

$$\exists c = \text{const} > 0 \text{ tel que } \|iu\|_Y \leq \|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Si en plus, i est compact, on écrit $X \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} Y$. On a :

Théorème 1.2.1. Soit $k \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty)$. Alors:

- $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} + \frac{k}{n}$ si $k < \frac{n}{p}$;
- $W^{k,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, q^*)$ si $k < \frac{n}{p}$;
- $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$ si $k < \frac{n}{p}$;
- $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ si $k > \frac{n}{p}$.

Un théorème similaire peut être formulé pour l'application de traces

$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ introduite dans le *théorème 1.1.3.* De ce théorème, il résulte que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$. Ce résultat peut cependant être affiné comme suit à partir de

Théorème 1.2.2. Soit $p \in [1, \infty)$ Alors on a :

- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\partial\Omega)$ où $q^* = \frac{np-p}{n-p}$ si $1 \leq p < n$;
- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ pour tout $q \in [1, q^*)$ si $1 \leq p < n$;
- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$ si $p \geq n$.

L'injection compacte de l'espace $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est connue sous le nom de théorème de Rellich.

Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Tous les résultats ci-dessus peuvent être étendus aux fonctions à valeurs vectorielles. Si $X(\Omega)$ est un espace de fonctions réelles $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ alors l'espace de fonctions vectorielles $v = (v_1, \dots, v_m)$ dont toutes les composantes appartiennent à $X(\Omega)$ sera noté $X(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dans la suite. Si τ est une fonction matricielle $(n \times m)$, dont les éléments appartiennent à $X(\Omega)$ alors on utilise la notation $X(\Omega, \mathbb{R}^m)$. La norme de $v \in X(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\tau \in X(\Omega, \mathbb{R}^{n \times m})$ respectivement, est défini de façon usuelle :

$$\begin{cases} \|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{X(\Omega)}, & v = (v_i)_{i=1}^m \\ \|\tau\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^{n \times m})} = \sum_{j=1, \dots, m} \|\tau_{ij}\|_{X(\Omega)} & \tau = (\tau_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \end{cases}$$

L'espace $C^k([0, T]; X)$:

Soit $k \in \mathbb{N}_0$, Par $C^k([0, T]; X)$ nous désignons l'ensemble de toutes les fonctions continues $u : [0, T] \longrightarrow X$ dont les dérivées (fortes) jusqu'à l'ordre k sont continues dans $[0, T]$ et appartiennent à X . L'espace $C^k([0, T]; X)$ est complet par rapport à la norme

$$\|u\|_{C^k([0, T]; X)} = \sum_{i=1}^k \max_{t \in [0, T]} \|u^{(i)}(t)\|_X, \quad (1.3.1)$$

où $u^{(i)}$ est la i -ième dérivée de u . Si $k = 0$ on utilise la convention suivante

$$C^0([0, T]; X) = C([0, T]; X).$$

L'espace $L^p(0, T; X)$, $p \in [1, \infty)$:

Pour $p \in [1, \infty)$, l'espace $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $u : [0, T] \longrightarrow X$ telle que $\int_0^T \|u(t)\|_X^p < \infty$. L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach

avec la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3.2)$$

L'espace $L^\infty(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $u : [0, T] \longrightarrow X$ telle que $\|u(t)\|_X < \infty$. Avec la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X; \quad (1.3.3)$$

où

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X = \inf \{M > 0 \mid \|u(t)\|_X \leq M \text{ p.p. } t \in (0, T)\}$$

Théorème 1.3.1

Soient X et Y des espaces de Banach avec X continûment plongé dans Y , alors :

- i)- L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
- ii)- Si X est un espace de Banach réflexif séparable, alors $L^p(0, T; X)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.
- iii)- L'injection $L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^r(0, T; Y)$ pour $1 \leq r \leq p \leq \infty$ est continue.
- iv)- Les injections $C([0, T]; X) \hookrightarrow L^\infty(0, T; X) \hookrightarrow L^p(0, T; X)$ sont continus pour $1 \leq p \leq \infty$.
- v)- Si X est un espace de Banach réflexif séparable, $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$(L^p(0, T; X))^* = L^p(0, T; X^*). \quad (1.3.4)$$

vi)- Si X est un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

L'inégalité suivante est très utile dans de nombreuses applications.

Théorème 1.3.2 (L'inégalité de Hölder): Soit X un espace de Banach, $1 < p < \infty$ et $1/p + 1/q = 1$. Alors l'inégalité suivante est vraie

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t) \rangle_{X^* \times X}| dt \leq \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X^*}^q dt \right)^{1/q} \\ \text{pour tout } u \in L^2(0, T; X), v \in L^p(0, T; X^*). \quad (1.3.5)$$

On note dans ce qui suit par $C_0^\infty(0, T)$ l'espace de toutes les fonctions à valeurs réelles définies sur $(0, T)$ qui sont infiniment dérivables sur $(0, T)$ et à support compact dans $(0, T)$. La définition suivante étend la notion de dérivée distributionnelle aux fonctions à valeurs spatiales de Banach.

1.1.3 Notions de base sur l'analyse non lisse

Opérateurs monotones et pseudomonotones

Nous commençons par quelques définitions concernant les opérateurs univalués.

Soit X un espace de Banach réflexif.

Définition 1.4.1. Un opérateur $A : X \longrightarrow X^*$ est appelé :

- (a) Borné si A transforme les ensembles bornés de X en ensembles bornés de X^* ,
- (b) Hémicontinue si, pour tout $u, v, w \in X$, la fonction $t \longrightarrow \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue pour $t \in [0, 1]$;

- (c) Monotone si $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$ pour tout $u, v \in X$;

- (d) Monotone maximal s'il est monotone et $\langle w - Av, u - v \rangle \geq 0$ pour tout $v \in X$ implique que $w = Au$;

- (e) Coercitif avec constante α s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|_X^2$ pour tout $u \in X$.

- (f) Pseudo-monotone s'il est borné et $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans X avec

$\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ implique $\liminf \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle$ pour tout $v \in X$.

Remarque 1.4.2. On peut montrer qu'un opérateur $A : X \longrightarrow X^*$ est pseudo-monotone si et seulement s'il est borné et $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans X avec $\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ impliquent $\lim \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0$ et $Au_n \rightharpoonup Au$ faiblement dans X^* . Notons que si $A : X \longrightarrow X^*$ est continue, alors elle est hémicontinue.

Proposition 1.4.3. Si $A : X \longrightarrow X^*$ est borné, hémicontinu et monotone, alors il est pseudomonotone.

Ensuite, nous passons aux opérateurs multivalués définis sur l'espace X . Étant donné un opérateur multivalué $T : X \longrightarrow 2^{X^*}$, son domaine $D(T)$, son portée $R(T)$ et graphe $G(T)$ sont les ensembles définis par

$$\begin{aligned} D(T) &= \{x \in X \mid Tx \neq \emptyset\}, \\ R(T) &= \cup \{Tx \mid x \in X\}, \\ G(T) &= \{(x, y) \in X \times X^* \mid y \in Tx\}, \end{aligned}$$

respectivement. On procède avec les définitions suivantes.

Définition 1.4.4. Un opérateur $T : X \longrightarrow 2^{X^*}$ est appelé :

- (a) Borné si le domaine de tout ensemble borné dans X est un ensemble borné dans X^* ;
- (b) Monotone si $\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0$ pour tout $(u, u^*), (v, v^*) \in G(T)$;
- (c) Monotone maximal s'il est monotone et maximal au sens d'inclusion des graphes dans la famille des opérateurs monotones de X à 2^{X^*} ;
- (d) u_0 -coercitif s'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha(r) = +\infty$ telle que pour tout $(u, u^*) \in G(T)$ on a $\langle u^*, u - u_0 \rangle \geq \alpha(\|u\|_X) \|u\|_X$, où u_0 est un élément donné de X ;
- (e) Pseudomonotone généralisé si, pour toute suite $\{u_n\} \subset X$ et $\{u_n^*\} \subset X^*$ tel que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans X , $u_n^* \in Tu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^* \rightarrow u^*$ faiblement dans X^* et $\limsup \langle u_n^*, u_n - u \rangle \leq 0$, on a $u^* \in Tu$ et

$$\lim \langle u_n^*, u_n \rangle = \langle u^*, u \rangle.$$

Le résultat suivant montre que tout opérateur pseudo-monotone est un pseudomonotone généralisé, tandis que l'inverse est vrai sous une condition de délimitation supplémentaire.

Proposition 1.4.5.[9] Soit X un espace de Banach réflexif et $A : X \longrightarrow 2^{X^*}$ un opérateur.

- (a) Si A est un opérateur pseudo-monotone, alors A est pseudo-monotone généralisé.
- (b) Si A est un opérateur pseudomonotone généralisé qui est borné et pour chaque $u \in X$, Au est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de X , alors A est pseudomonotone.

Théorème 1.4.6.[9] Soit X un espace de Banach réflexif et $A : X \longrightarrow 2^{X^*}$ pseudomonotone et coercitif. Alors A est surjectif, c'est-à-dire $R(A) = X^*$.

1.1.4 Sous-gradient de fonctions convexes .

Soit $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$. Le domaine effectif de φ est l'ensemble

$\text{dom}\varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) < +\infty\}$. On dit que φ est convexe si, pour tout $x, y \in \text{dom}\varphi$ et tout $\lambda \in (0, 1)$, on a

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

La fonction φ est dite propre si $\text{dom}\varphi \neq \emptyset$. La fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieure (s.c.i.) si, pour tout $u \in X$ et pour toute suite $\{u_n\} \subset X$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans X , on a

$$\liminf \varphi(u_n) \geq \varphi(u)$$

Nous rappelons maintenant la notion de sous-différentielle d'une fonction convexe.

Définition 1.4.7. Soit $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction propre et convexe. L'application $\partial_c\varphi : X \rightarrow 2^{X^*}$ définie par

$$\partial_c\varphi = \{\zeta \in X^* \mid \langle \zeta, v - x \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(x) \text{ pour tout } v \in X\}.$$

est appelé le sous-différentiel convexe de φ . Si $\partial_c\varphi$ est non vide, tout élément $f \in \partial_c\varphi$ est appelé un sous-gradient de φ en x . Il est facile de voir que $\partial_c\varphi : X \rightarrow 2^{X^*}$ est un opérateur monotone. De plus, nous avons le résultat bien connu suivant.

Théorème 1.4.8.[16]: Soient X un espace de Banach et $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe, s.c.i. Alors $\partial_c\varphi : X \rightarrow 2^{X^*}$ est monotone maximal.

Dans de nombreuses situations, nous traitons des fonctions $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ où K est un sous-ensemble non vide de X . Dans de tels cas, il est commode d'étendre la fonction φ à l'espace X en considérant la fonction $\tilde{\varphi} : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ Défini par

$$\tilde{\varphi}(v) = \begin{cases} \varphi(v) & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si non.} \end{cases}$$

On dit que la fonction $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si son extension $\tilde{\varphi} : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est convexe. Elle est semi-continue inférieure (sur K) si $\tilde{\varphi}$ est semi-continue inférieure. Le cas spécial $\varphi = 0$ mérite un traitement plus détaillé.

Exemple . Étant donné un sous-ensemble non vide K de X , la fonction χ_K sur X , Défini par

$$\chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si } v \notin K, \end{cases}$$

est appelée la fonction indicatrice de K . On peut prouver que le sous-ensemble K de X est convexe si et seulement si χ_K est convexe. De plus, K est fermé si et seulement si χ_K est s.c.i. Le sous-différentiel de χ_K est l'opérateur multivalué $\partial_c \chi_K : X \rightarrow 2^{X^*}$ donné par

$$\partial_c \chi_K(x) = \begin{cases} \{\zeta \in X^* \mid \langle \zeta, x - v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in X\} & \text{si } x \in K \\ \emptyset & \text{si } x \notin K \end{cases}. \quad (1.4.1)$$

De (1.4.1) il résulte que

$$\zeta \in \partial_c \chi_K(x) \iff \langle \zeta, x - v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in K. \quad (1.4.2)$$

Sous-gradient au sens de Clarke

Nous passons maintenant en revue la notion de sous-différentiel de Clarke voir [4, 9], par exemple pour une fonction localement Lipschitz. Rappelons tout d'abord qu'une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite localement Lipschitz si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x , noté V_x , et une constante $L_x > 0$ est V_x -dépendante telle que

$$|j(y) - j(z)| \leq L_x \|y - z\|_X \quad \text{pour tout } y, z \in V_x$$

On rappelle aussi qu'une fonction continue convexe $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitz.

Définition 1.4.9. Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitz. La dérivée directionnelle généralisée (Clarke) de j en point $x \in X$ dans la direction $v \in X$, notée $j^0(x; v)$, est définie par

$$j^0(x; v) = \limsup_{w \rightarrow x, \lambda \rightarrow 0} \frac{j(w + \lambda v) - j(w)}{\lambda}.$$

Le gradient généralisé (sous-différentiel) de j en x est un sous-ensemble de l'espace dual X^* donné par

$$\partial j(x) = \{\xi \in X^* \mid j^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle \text{ pour tout } v \in X\}.$$

Une fonction localement Lipschitz j est dite régulière (au sens de Clarke) en $x \in X$ si pour tout $v \in X$ la dérivée directionnelle unilatérale

$$j'(x; v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{j(x + \lambda v) - j(x)}{\lambda}.$$

existe et $j'(x; v) = j^0(x; v)$.

Proposition 1.4.10.[16]: Supposons que $j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitz. Alors les déclarations suivantes sont valides.

- (i) Pour tout $x \in X$, la fonction $X \ni x \longrightarrow j^0(x; v) \in \mathbb{R}$ est positivement homogène et sous-additif, c'est-à-dire $j^0(x; \lambda v) = \lambda j^0(x; v)$ pour tout $\lambda \geq 0, v \in X$ et $j^0(x; v_1 + v_2) \leq j^0(x; v_1) + j^0(x; v_2)$ pour tout $v_1, v_2 \in X$, respectivement.
- (ii) Pour tout $v \in X$, on a $j^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle \mid \xi \in \partial j(x)\}$.
- (iii) La fonction $X \times X \ni (x, v) \longrightarrow j^0(x; v) \in \mathbb{R}$ est semi-continue supérieure, c'est-à-dire pour tout $x, v \in X, \{x_n\}, \{v_n\} \subset X$ tels que $x_n \rightarrow x$ et $v_n \rightarrow v$ dans X , on a $\limsup j^0(x_n; v_n) \leq j^0(x; v)$.
- (iv) Pour tout $x \in X$, le gradient généralisé $\partial j(x)$ est non vide, convexe et faiblement étoile sous-ensemble compact de X^* .
- v) Le graphe du gradient généralisé ∂j est fermé en topologie $X \times X_{w^*}^*$, c'est-à-dire si $\{x_n\} \subset X$ et $\{\xi_n\} \subset X^*$ sont des suites telles que $\xi_n \in \partial j(x_n)$ et $x_n \rightarrow x$ dans X , $\xi_n \rightarrow \xi$ faiblement étoile dans X^* , alors $\xi \in \partial j(x)$.
- vi) Si $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors le sous-différentiel au sens de Clarke $\partial j(x)$ en tout $x \in X$ coïncide avec le sous-différentiel convexe $\partial_c j(x)$.

Proposition 1.4.11.[16] Soit $j, j_1, j_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions sont localement Lipschitz. Ensuite nous avons le suivant.

- (i) Multiples scalaires. L'égalité $\partial(\lambda j)(x) = \lambda \partial j(x)$ est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in X$.
- (ii) Règles de somme. L'inclusion

$$\partial(j_1 + j_2)(x) \subseteq \partial j_1(x) + \partial j_2(x) \quad (1.4.3)$$

est vraie pour tout $x \in X$ ou, de façon équivalente,

$$(j_1 + j_2)^0(x; v) \leq j_1^0(x; v) + j_2^0(x; v) \text{ pour tout } x \in X, v \in X. \quad (1.4.4)$$

- (iii) Si j_1, j_2 sont réguliers en $x \in X$, alors $j_1 + j_2$ est régulier en $x \in X$ et on a des égalités en (1.4.3) et (1.4.4).

Proposition 1.4.12.[9] Soient X et Y des espaces de Banach, soit $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitz et soit $T : X \rightarrow Y$ donné par $Tx = Ax + y$ pour $x \in X$, où $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

et $y \in Y$ est fixé. Alors la fonction $j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $j(x) = \varphi(Tx)$ est localement Lipschitz et

(i) $j^0(x; v) \leq \varphi^0(Tx; Av)$ pour tout $x, v \in X$,

(ii) $\partial j(x) \subseteq A^* \partial \varphi(Tx)$ pour tout $x \in X$,

où $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ est l'opérateur adjoint de A . De plus, si φ (ou $-\varphi$) est régulier, alors que j (ou $-j$) soit régulier et dans (i) et (ii) ont des égalités. Ces égalités sont également vraies si au lieu de la condition de régularité, on suppose que A est surjectif.

Chapitre 2

Les inclusions stationnaires et Les inéquations hémivariationnelles

Dans ce chapitre, nous étudions les inclusions d'opérateurs stationnaires, c'est-à-dire les inclusions dans lesquelles les dérivées de l'inconnue par rapport à la variable de temps ne sont pas impliquées. Nous commençons par un résultat d'existence de base pour les inclusions d'opérateurs abstraits. Ensuite, nous l'utilisons pour prouver l'existence de solutions pour diverses inclusions d'opérateurs de type sous-différentiel. Nous montrons également que, sous des hypothèses supplémentaires, la solution des inclusions correspondantes est unique. Enfin, nous spécialisons nos résultats d'existence et d'unicité dans l'étude des inéquations hémivariationnelles stationnaires. Les théorèmes présentés dans ce chapitre seront appliqués à l'étude des problèmes statiques de contact frictionnel au Chap 3.

2.1 Le résultat principal de l'existence

Dans cette section, nous établissons l'existence de solutions à une inclusion d'opérateur abstrait. Étant donné un espace normé X , on désigne par X^* son dual (topologique) et par $\|\cdot\|_X$ sa norme. Pour les parenthèses de dualité pour la paire (X, X^*) nous utilisons la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$. On considère deux triples d'évolution d'espaces (V, H, V^*) et (Z, H, Z^*) . Rappelons que cela signifie que V et Z sont deux espaces de Banach réflexifs séparables, H est un espace de Hilbert et $V \subset H \subset V^*$, $Z \subset H \subset Z^*$ avec des injections continus

et denses. De plus, on suppose que $V \subset Z$ avec injection compact. Soit $A : V \longrightarrow V^*$, $B : V \longrightarrow 2^{Z^*}$ être donné des opérateurs et $f \in V^*$. L'inclusion d'opérateurs à l'étude est la suivante.

Problème 2.1.1. Trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que

$$A\mathbf{u} + B\mathbf{u} \ni f. \quad (2.1.1)$$

Nous complétons l'énoncé du *problème 2.1.1* avec la définition suivante.

Définition 2.1.2 Un élément $\mathbf{u} \in V$ est une solution au problème **2.1.1** si et seulement s'il existe $\zeta \in Z^*$ tels que

$$A\mathbf{u} + \zeta = f \text{ et } \zeta \in B\mathbf{u}. \quad (2.1.2)$$

Dans l'étude du problème **2.1.1**, nous considérons les hypothèses suivantes.

$$A : V \longrightarrow V^* \text{ est pseudomonotone et coercitif avec constante } \alpha > 0. \quad (2.1.3)$$

$$B : V \longrightarrow 2^{Z^*}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \|B\mathbf{v}\|_{Z^*} \leq b_0 (1 + \|\mathbf{v}\|_V) \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V \text{ avec } b_0 > 0. \\ \text{(b) Pour tout } \mathbf{v} \in V, B\mathbf{v} \text{ est non vide, convexe et faiblement compact en } Z^*. \\ \text{(c) } \langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \geq -b_1 \|\mathbf{v}\|_V^2 - b_2 \|\mathbf{v}\|_V - b_3 \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V \text{ avec } b_1, b_2, b_3 > 0. \\ \text{(d) } Gr(B) \subset V \times Z^* \text{ est fermé dans la topologie } Z \times (w - Z^*) \\ \text{c'est-à-dire, si } \zeta_n \in B\mathbf{v}_n \text{ avec } \mathbf{v}_n, \mathbf{v} \in V, \mathbf{v}_n \longrightarrow \mathbf{v} \text{ en } Z \text{ et} \\ \zeta_n, \zeta \in Z^*, \zeta_n \longrightarrow \zeta \text{ faiblement dans } Z^*, \text{ puis } \zeta \in B\mathbf{v}. \end{array} \right. \quad (2.1.4)$$

Rappelons que, d'après la *définition 1.4.1(e)*, un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ est dit coercitif de constante $\alpha > 0$, si $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2$ pour tout $\mathbf{v} \in V$; la notion de pseudomonotonie pour un opérateur à valeur unique est donnée dans la *Définition 1.4.1(f)*; en (2.1.4) et ci-dessous, la notation $w - Z$ représente l'espace Z^* doté de la topologie faible et, enfin, des conditions suffisantes pour la pseudomonotonie sont fournies dans la *Proposition 1.4.3*.

Notons que puisque B est un opérateur multivalué, alors pour chaque $\mathbf{v} \in V$, $B\mathbf{v}$ représente un ensemble dans Z^* et donc les notations $\|B\mathbf{v}\|_{Z^*}$ et $\langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V}$ ne sont pas définis a priori. Néanmoins, précisons que l'inégalité (2.1.4)(a) s'entend au sens où

$$\|\mathbf{v}^*\|_{Z^*} \leq b_0 (1 + \|\mathbf{v}\|_V) \text{ pour tout } \mathbf{v}^* \in B\mathbf{v}$$

et, de même, (2.1.4)(c) signifie que

$$\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \geq -b_1 \|\mathbf{v}\|_V^2 - b_2 \|\mathbf{v}\|_V - b_3 \text{ pour tous les } \mathbf{v}^* \in B\mathbf{v}.$$

Pour la commodité du lecteur, nous utiliserons une telle notation pour les opérateurs multivalués partout dans le reste de cette mémoire.

Notre principal résultat d'existence dans l'étude du problème 2.1.1 est le suivant.

Théorème 2.1.3. Supposons que (2.1.3) - (2.1.4) soient vérifiés, $f \in V^*$ et $\alpha > b_1$. Alors

Le problème 2.1.1 a au moins une solution $\mathbf{u} \in V$ et, de plus,

$$\|\mathbf{v}\|_V \leq C (1 + \|f\|_{V^*}) \quad (2.1.5)$$

avec C une constante positive.

Démonstration. On définit l'application multivaluée $\mathcal{F} : V \longrightarrow 2^{V^*}$ par

$$\mathcal{F}\mathbf{v} = (A + B)\mathbf{v} \text{ pour } \mathbf{v} \in V. \quad (2.1.6)$$

Nous montrons que \mathcal{F} est pseudomonotone et coercitif. Tout d'abord, nous prouvons le pseudomonotonie de \mathcal{F} et, à cette fin, nous utilisons la *proposition 1.4.5* qui stipule qu'un opérateur pseudomonotone généralisé qui est borné et a des valeurs non vides, fermées et convexes est pseudomonotone.

D'après la propriété (2.1.4)(b), il est clair que \mathcal{F} a des valeurs non vides, convexes et fermées dans V^* . D'après les limites de A (garantie par (2.1.3) et la *définition 1.4.1(f)*) et (2.1.4)(a), il s'ensuit que \mathcal{F} est une application bornée, c'est-à-dire qu'elle image des sous-ensembles bornés de V en sous-ensembles bornés de V^* .

Nous montrons que \mathcal{F} est un opérateur pseudomonotone généralisé. Pour cela, soit $\mathbf{v}_n, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}$ dans V , $\mathbf{v}_n^*, \mathbf{v}^* \in V^*$, $\mathbf{v}_n^* \rightharpoonup \mathbf{v}^*$ dans V^* , $\mathbf{v}_n^* \in \mathcal{F}\mathbf{v}_n$ et suppose que

$$\limsup \langle \mathbf{v}_n^*, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \leq 0.$$

On montre que $\mathbf{v}^* \in \mathcal{F}\mathbf{v}$ et

$$\langle \mathbf{v}_n^*, \mathbf{v}_n \rangle_{V^* \times V} \longrightarrow \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V}. \quad (2.1.7)$$

On a $\mathbf{v}_n^* = A\mathbf{v}_n + \zeta_n$ avec $\zeta_n \in B\mathbf{v}_n$. De la compacité de l'injection $V \hookrightarrow Z$ il s'ensuit que

$$\mathbf{v}_n \longrightarrow \mathbf{v} \text{ dans } Z.$$

Par la borne de B , garantie par (2.1.4)(a), en passant à une sous-suite, si nécessaire, on a

$$\zeta_n \longrightarrow \zeta \text{ faiblement dans } Z^* \text{ avec quelques } \zeta \in Z^*. \quad (2.1.8)$$

De (2.1.4)(d), (2.1.7) et (2.1.8), puisque $\zeta_n \in B\mathbf{v}_n$, on déduit immédiatement que $\zeta \in B\mathbf{v}$. De plus, de l'égalité

$$\langle \mathbf{v}_n^*, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \langle A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \langle \zeta_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{Z^* \times Z}.$$

on obtient

$$\limsup \langle A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \limsup \langle \mathbf{v}_n^*, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \leq 0.$$

En exploitant maintenant la pseudomonotonie de A , d'après la *Remarque 1.4.2.* on en déduit que

$$A\mathbf{v}_n \longrightarrow A\mathbf{v} \text{ faiblement dans } V^* \quad (2.1.9)$$

et

$$\limsup \langle A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = 0. \quad (2.1.10)$$

Par conséquent, en passant à la limite dans l'équation $\mathbf{v}_n^* = A\mathbf{v}_n + \zeta_n$, nous avons $\mathbf{v}^* = A\mathbf{v} + \zeta$ qui, avec $\zeta \in B\mathbf{v}$, implique $\mathbf{v}^* \in A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = \mathcal{F}\mathbf{v}$. Ensuite, à partir des convergences (2.1.7)–(2.1.10) on obtient

$$\begin{aligned} \lim \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} &= \lim \langle A\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \lim \langle A\mathbf{v}_n, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \lim \langle \zeta_n, \mathbf{v}_n \rangle_{Z^* \times Z} \\ &= \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \langle \zeta, \mathbf{v} \rangle_{Z^* \times Z} = \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \end{aligned}$$

ce qui, d'après la *définition 1.4.4 (e)*, montre que \mathcal{F} est un opérateur pseudomonotone généralisé.

Ensuite, par les hypothèses sur les opérateurs A et B on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} &= \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{Z^* \times Z} \\ &\geq (\alpha - b_1) \|\mathbf{v}\|_V^2 - b_2 \|\mathbf{v}\|_V - b_3 = \beta(\|\mathbf{v}\|_V) \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

où $\beta(t) = (\alpha - b_1)t - b_2 - \frac{b_3}{t}$ et $\beta(t) \longrightarrow +\infty$, comme $t \longrightarrow +\infty$.

D'où

$$\lim_{\|\mathbf{v}\|_V \rightarrow \infty} \frac{\inf \{ \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \mid \mathbf{v}^* \in \mathcal{F}\mathbf{v} \}}{\|\mathbf{v}\|_V} = +\infty,$$

ce qui, signifie que l'opérateur \mathcal{F} est coercitif. Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le *théorème 1.4.6* à l'opérateur multivalué \mathcal{F} . On en déduit que \mathcal{F} est surjectif, ce qui implique que le problème **2.1.1** a une solution $\mathbf{u} \in V$. De plus, à partir de la coercivité de \mathcal{F} on a

$$(\alpha - b_1) \|\mathbf{u}\|_V^2 - b_2 \|\mathbf{u}\|_V - b_3 \leq \|f\|_{V^*} \|\mathbf{u}\|_V.$$

ce qui implique que l'estimation (**2.1.5**) est vérifiée avec une constante positive C dépendant de b_1, b_2, b_3 et α . Ceci termine la preuve du théorème.

2.2 Inclusions de type sous-différentiel

Dans cette section, nous utilisons le résultat de la Section. **2.1** pour montrer l'existence de solutions à diverses inclusions d'opérateurs généraux de type sous-différentiel. Ensuite, nous complétons ces résultats d'existence avec divers résultats d'unicité. À cette fin, nous introduisons quelques notations supplémentaires.

Soit (V, H, V^*) et (Z, H, Z^*) être des triples d'évolution d'espaces tels que l'injection $V \subset Z$ soit compact, comme introduit dans la Section. **2.1**. On note $c_i > 0$ le constante de injection de V dans Z . Soit X un espace de Banach réflexif et $M : Z \longrightarrow X$ un opérateur continu linéaire donné. On note $\|M\|$ la norme de l'opérateur M dans $\mathcal{L}(Z, X)$ et par $M^* : X^* \longrightarrow Z^*$ l'opérateur adjoint à M .

L'existence générale et l'unicité

Soit $A : V \longrightarrow V^*$ être un opérateur, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle donnée et $f \in V^*$. Nous considérons l'inclusion suivante de type sous-différentiel.

Problème 2.2.1. Trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que

$$A\mathbf{u} + M^* \partial J(M\mathbf{u}) \ni f. \quad (2.2.1)$$

Rappelons qu'une solution du problème 2.2.1 s'entend au sens de la définition 2.1.2. Dans l'étude du problème 2.2.1, nous avons besoin des hypothèses suivantes.

$A : V \longrightarrow V^*$ est un opérateur satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } A \text{ est pseudomonotone et coercitif avec constante } \alpha > 0 : \\ \text{(b) } A \text{ est fortement monotone, c'est-à-dire,} \\ \text{Il existe une constante } m_A > 0 \text{ telle que} \\ \langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle_{V^* \times V} \geq m_A \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

$J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } J \text{ est localement Lipschitz sur } X . \\ \text{(b) } \|\partial J(u)\|_{X^*} \leq c_0 + c_1 \|u\|_X \\ \text{Pour tout } u \in X \text{ avec } c_0, c_1 > 0 \\ \text{(c) } \partial J : X \times X \longrightarrow 2^{X^*} \text{ a un graphe fermé dans } X \times X \times (w - X) . \\ \text{(d) } \langle z_1 - z_2, u_1 - u_2 \rangle_{X^* \times X} \geq -m_J \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \text{pour tout } z_i \in \partial J(u_i), z_i \in X, u_i \in X, i = 1, 2 \text{ avec } m_J \geq 0. \\ \text{(e) } J^0(u; -u) \leq d_0 (1 + \|u\|_X) \text{ pour tout } u \in X \text{ avec } d_0 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

$$M \in \mathcal{L}(Z, X) \quad (2.2.4)$$

$$m_A > m_J c_e^2 \|M\| \quad (2.2.5)$$

Notez que dans (2.2.3) les symboles ∂J et J^0 désignent le sous-différentiel de Clarke et la dérivée directionnelle généralisée de $J(\cdot)$, respectivement.

Sous la notation de cette section, nous avons le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.2.2.[9]. Supposons que (2.2.2) et (2.2.4) sont vérifiées, $f \in V^*$ et l'une des hypothèses suivantes :

- (i) (2.2.3) (a)-(d) et $\alpha > c_1 c_e^2 \|M\|$.
- (ii) (2.2.3).

est satisfait. Alors le problème 2.2.1 admet une solution unique $\mathbf{u} \in V$ qui satisfait l'estimation (2.1.5) .

Démonstration. On applique le *théorème* 2.1.3 avec l'opérateur $B : V \longrightarrow 2^{Z^*}$ défini par

$$B\mathbf{v} = M^*\partial J(M\mathbf{v}) \text{ pour } \mathbf{v} \in V.$$

La preuve de la partie existence du théorème suit exactement les étapes de la preuve du *Théorème* 4.5 de [9,p.p.99 – 100] où

$$B\mathbf{v} = M^*\partial J(M\mathbf{v}) \text{ pour } \mathbf{v} \in V.$$

L'unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème 2.2.1, en écrivant Eq.(2.2.1) une fois pour u_1 et une fois pour u_2 , on obtient $A\mathbf{u}_1 + M^*\partial J(M\mathbf{u}_1) \ni f$, $A\mathbf{u}_2 + M^*\partial J(M\mathbf{u}_2) \ni f$ respectivement.

Alors, il existe $z_i \in X^*$ et $z_i \in \partial J(M\mathbf{u}_i)$ tels que

$$A\mathbf{u}_i + M^*z_i = f \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (2.2.6)$$

En soustrayant les deux équations ci-dessus, en multipliant le résultat par $u_1 - u_2$ on obtient

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle_{V^* \times V} + \langle M^*z_1 - M^*z_2, u_1 - u_2 \rangle_{V^* \times V} = 0$$

Utilisant (2.2.2)(b), nous trouvons

$$m_A \|u_1 - u_2\|_V^2 + \langle M^*z_1 - M^*z_2, u_1 - u_2 \rangle_{V^* \times V} \leq 0 \quad (2.2.7)$$

Nous avons

$$\langle M^*z_1 - M^*z_2, u_1 - u_2 \rangle_{V^* \times V} = \langle z_1 - z_2, Mu_1 - Mu_2 \rangle_{X^* \times X}$$

Ensuite, par (2.2.3)(b), on obtient

$$\langle M^*z_1 - M^*z_2, u_1 - u_2 \rangle_{V^* \times V} \geq -m_J \|Mu_1 - Mu_2\|_X^2$$

et, par conséquent

$$\langle M^*z_1 - M^*z_2, u_1 - u_2 \rangle_{V^* \times V} \geq -m_J c_e^2 \|M\|^2 \|u_1 - u_2\|_V^2 \quad (2.2.8)$$

Substituons (2.2.8) dans (2.2.7), on obtient

$$m_A \|u_1 - u_2\|_V^2 - m_J c_e^2 \|M\|^2 \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq 0,$$

Cela implique

$$(m_A - m_J c_e^2 \|M\|^2) \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq 0,$$

ce qui, au vu de (2.2.5), implique $u_1 = u_2$. Par la suite, de (2.2.6) on déduit que $z_1 = z_2$.

2.3 Inéquations hémivariationnelles elliptiques

Dans cette section, nous utilisons les résultats de la section 2.2, pour présenter les résultats d'existence et d'unicité des solutions pour les inégalités hémivariationnelles elliptiques. A cette fin, nous introduisons la notation suivante.

Dans cette section, nous utilisons les résultats de la section 2.2, pour fournir les résultats d'existence et d'unicité des solutions aux inéquations hémivariationnelles. A cette fin, nous introduisons la notation suivante.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^d avec une frontière de Lipschitz $\partial\Omega = \Gamma$ et soit Γ_C une partie mesurable de $\partial\Omega$. Aussi, soit V un sous-espace fermé de $H^1(\Omega; \mathbb{R}^s)$, $s \in \mathbb{N}$, $H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^s)$ et $Z = H^\delta(\Omega; \mathbb{R}^s)$ avec un $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ fixe. Désignant par $i : V \longrightarrow Z$ l'injection et par $\gamma : Z \longrightarrow L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$ et $\gamma_0 : H^1(\Omega; \mathbb{R}^s) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_C; \mathbb{R}^s) \subset L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$ les opérateurs de trace, nous obtenons $\gamma_0 v = \gamma(iv)$ for all $v \in V$. Pour simplifier, dans ce qui suit nous omettons l'injection i et nous écrivons $\gamma_0 v = \gamma(iv)$ pour tout $v \in V$. De la théorie des espaces de Sobolev nous savons que (V, H, V^*) et (Z, H, Z^*) forment des triplets d'évolution des espaces et $V \longrightarrow Z$ avec injection compact. On note c_e la constante d'injection de V dans Z . Il découle du *théorème 1.1.3* que l'opérateur trace $\gamma : Z \longrightarrow L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$ est linéaire et continu. On note $\|\gamma\|$ la norme de la trace dans $\mathcal{L}(Z, L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s))$ et par $\gamma^* : L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s) \longrightarrow Z^*$ l'opérateur adjoint de γ .

Étant donné un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$, $j : \Gamma_C \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle prescrite et $f \in V^*$, nous considérons le problème de trouver un élément u tels que

$$u \in V, \quad \langle Au, v \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Gamma_C} j^0(\gamma u; \gamma v) d\Gamma \geq \langle f, v \rangle_{V^* \times V} \quad \forall v \in V. \quad (2.3.1)$$

Une inéquation de la forme (2.3.1) s'appelle *inéquation hémivariationnelle elliptique*. Ici, la notation j^0 représente la dérivée directionnelle généralisée de $j(x, \cdot)$. Dans ce qui suit, nous sautons parfois la dépendance de diverses fonctions sur la variable $x \in \Omega \cup \Gamma$ et omettons le symbole γ de l'opérateur de trace.

Dans l'étude de le problème (2.3.1), on suppose que l'opérateur A vérifiant l'hypothèse (2.2.2). On rajoute une hypothèse sur la fonction $j : \Gamma_C \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } j(\cdot, \xi) \text{ est mesurable sur } \Gamma_C \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \\ \text{et il existe } e \in L^2(\Gamma_C, \mathbb{R}^d) \text{ tel que } j(\cdot, e(\cdot)) \in L^1(\Gamma_C); \\ \text{(b) } j(\cdot, \xi) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R}^d \text{ pour p.p. } x \in \Gamma_C. \\ \text{(c) il existe } \bar{c}_0, \bar{c}_1 > 0 \text{ tel que } \|\bar{\partial} j(x, \xi)\|_{\mathbb{R}^d} \leq \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}, \\ \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ et p.p. } x \in \Gamma_C; \\ \text{(d) il existe } m_2 > 0, \text{ tel que } (\zeta_1^* - \zeta_2^*) \cdot (\zeta_1 - \zeta_2) \geq -m_2 \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{\mathbb{R}^d}^2, \\ \text{pour tout } \zeta_i \in \bar{\partial} j(x, \xi_i), \xi_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2 \text{ et p.p. } x \in \Gamma_C \\ \text{(d) il existe } d_0 \geq 0 \text{ tel que } j^0(x, \xi; -\xi) \leq d_0 (1 + \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}), \\ \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ et p.p. } x \in \Gamma_C. \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

Théorème 2.3.1. Supposons que (2.2.2) soit vérifiée et $f \in V^*$. Si l'une des hypothèses suivantes :

(i) (2.3.2)(a)-(e) et $\alpha > \sqrt{3\bar{c}_1} c_e^2 \|\gamma\|^2$.

(ii) (2.3.2)

Soit satisfait, et si lhypothèse de petitesse

$$m_A > m_j c_e^2 \|\gamma\|^2 \quad (2.3.3)$$

est vérifiée, alors le problème (2.3.1) a une solution unique $u \in V$.

De plus, si u_i est la solution du problème (1.2.1) correspond à $f = f_i \in V^*$ pour $i = 1, 2$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq C \|f_1 - f_2\|_{V^*}. \quad (2.3.4)$$

Démonstration. On applique le théorème 2.2.2. Pour cela, nous observons que (2.3.3) implique (2.2.5) et considérons la fonctionnelle $J : L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$J(u) = \int_{\Gamma_C} j(x, u(x)) d\Gamma \quad \text{pour } u \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s). \quad (2.3.5)$$

Lemme 2.3.2.[8] Supposons que $j : \Gamma_C \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'hypothèse (2.3.2). Alors la fonctionnelle J donnée par (2.3.5) est bien définie et localement Lipschitz sur des sous-ensembles bornés de $L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$, son gradient généralisé satisfait la condition de croissance linéaire

$$\begin{aligned} \zeta &\in \partial J(u) \Rightarrow \|\zeta\|_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} \leq c_0 - c_1 \|\zeta\|_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)}, \\ \text{avec } c_0 &= \sqrt{3 \operatorname{mes}(\Gamma_C)} \bar{c}_0 \text{ et } c_1 = \sqrt{3} \bar{c}_1 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

et pour sa dérivée directionnelle généralisée nous avons

$$J^0(u, v) \leq \int_{\Gamma_C} j^0(x, u(x); v(x)) d\Gamma \quad \text{pour } u, v \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s). \quad (2.3.7)$$

et

$$J^0(u, -u) \leq d_0 \left(1 + \|u\|_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)}\right) \quad \text{avec } d_0 \geq 0.$$

De plus, si en plus j ou $-j$ est régulier au sens de *Clarke*, alors J ou $-J$ est régulier, respectivement. Alors

$$J^0(u, v) = \int_{\Gamma_C} j^0(x, u(x); v(x)) d\Gamma \quad \text{pour } u, v \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s).$$

et

$$\partial(J \circ \gamma)(v) = \gamma^* \circ \partial(\gamma v) \quad \text{pour } v \in V,$$

où $\gamma^* : L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s) \longrightarrow V^*$ désigne l'opérateur adjoint de γ donné par

$$\gamma^* z(v) = \int_{\Gamma_C} z(x) \gamma v(x) d\Gamma \quad \text{pour tout } v \in V, \text{ pour } z \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s).$$

Ensuite, sous les hypothèses (2.3.2)(a)–(d), nous montrons que la fonctionnelle J satisfait la condition (2.2.3)(d). En effet, soit $u_i, z_i \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$, $z_i \in \partial J(u_i)$, $i = 1, 2$. De (2.3.6), on déduit qu'il existe $\zeta_i \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$ tel que $\zeta_i \in \partial j(x, u_i(x))$ pour a.e. $x \in \Gamma_C$ et

$$\langle z_i, v \rangle_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} = \int_{\Gamma_C} \zeta_i(x) \cdot v(x) d\Gamma \quad \text{pour tout } v \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s) \text{ pour } i = 1, 2.$$

D'après (2.3.2)(d), on a

$$\begin{aligned} \langle z_1 - z_2, u_1 - u_2 \rangle_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} &= \int_{\Gamma_C} (\zeta_1(x) - \zeta_2(x)) \cdot (u_1(x) - u_2(x)) d\Gamma \\ &\geq -m_j \int_{\Gamma_C} \|u_1(x) - u_2(x)\|_{\mathbb{R}}^2 d\Gamma \\ &= -m_j \|u_1(x) - u_2(x)\|_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)}^2. \end{aligned}$$

Nous concluons de ce qui précède que la condition (2.2.3) est satisfaite. De plus, on observe que l'hypothèse (i) implique la condition $\alpha > c_1 c_e \|\gamma\|^2$ et donc l'hypothèse (i) du théorème 2.2.2 est vérifiée.

Deuxièmement, nous supposons l'hypothèse (ii). Puis, en appliquant à nouveau le Lemme 2.3.2, on obtient (2.2.3). Par conséquent, il est facile de voir que l'hypothèse (ii) du théorème 2.2.2 est vérifiée. Du théorème 2.2.2 on déduit qu'il existe une solution unique $u \in V$ au problème

$$A\mathbf{u} + \gamma^* \partial J(\gamma \mathbf{u}) \ni f \quad (2.3.8)$$

qui satisfait l'estimation (2.1.5). Nous procédons à notre preuve par l'étape suivante.

Affirmation : toute solution de (2.3.8) résout le problème 2.3.1. Il découle de (2.3.8) qu'il existe $z \in \partial J(\gamma u)$, $z \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)$ tels que $A\mathbf{u} + \gamma^* z = f$. En multipliant ce dernier par $v \in V$, on a

$$\langle A\mathbf{u}, v \rangle_{V^* \times V} + \langle \gamma^* z, v \rangle_{V^* \times V} = \langle f, v \rangle_{V^* \times V}$$

Alors

$$\langle A\mathbf{u}, v \rangle_{V^* \times V} + \langle z, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} = \langle f, v \rangle_{V^* \times V}$$

D'après (2.3.7), avec la définition de la sous-différentielle, implique

$$\langle z, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} \leq J^0(\gamma u, \gamma v) \leq \int_{\Gamma_C} j^0(x, \gamma u(x); \gamma v(x)) d\Gamma.$$

Il découle de ce qui précède que \mathbf{u} est une solution au problème 2.3.1 et cela prouve l'affirmation.

Enfin, nous supposons l'hypothèse de régularité soit sur j soit sur $-j$. Afin de prouver que, sous cette hypothèse, la solution du problème 2.3.1 est unique, nous montrons que $u \in V$ résout (2.3.8) si et seulement si $u \in V$ résout le problème 2.3.1. En raison de la revendication précédente, il suffit de prouver la partie . Soit donc $u \in V$ une solution au problème 2.3.1, c'est-à-dire,

$$\langle Au, v \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Gamma_C} j^0(x, \gamma u(x); \gamma v(x)) d\Gamma \geq \langle f, v \rangle_{V^* \times V} \quad \forall v \in V$$

Alors, par le Lemme 2.3.2, nous savons que dans (2.3.7) nous avons l'égalité. Ainsi

$$\langle Au, v \rangle_{V^* \times V} + J^0(\gamma u, \gamma v) \geq \langle f, v \rangle_{V^* \times V} \quad \forall v \in V$$

De ce dernier, en exploitant les égalités

$$J^0(\gamma u, \gamma v) = (J \circ \gamma)^0(u, v) \text{ et } \partial(J \circ \gamma)(u) = \gamma^* \partial(\gamma u)$$

(qui représentent une conséquence de la *Proposition 1.4.12*), on a

$$\langle f - Au, v \rangle_{V^* \times V} \leq J^0(\gamma u, \gamma v) = (J \circ \gamma)^0(u, v) \quad \forall v \in V$$

et

$$\begin{aligned} f - Au &\in \partial(J \circ \gamma)(u) = \gamma^* \partial(\gamma u). \\ \Rightarrow f &\in Au + \gamma^* \partial(\gamma u). \end{aligned}$$

On en déduit que $u \in V$ est solution de (2.3.8).

Démontrer enfin l'inégalité (2.3.4). Soit $f_i \in V$ et u_i l'unique solution du problème 2.3.1 correspondant à f_i , $i = 1, 2$. Comme le problème 2.3.1 est équivalent à (2.3.8), on a $Au_i + \gamma^* \zeta_i = f_i$ et $\zeta_i \in \partial J(\gamma u_i)$, $i = 1, 2$. D'où

$$Au_1 - Au_2 + \gamma^* \zeta_1 - \gamma^* \zeta_2 = f_1 - f_2$$

et d'après (2.2.2)(b), on a

$$m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + (\zeta_1 - \zeta_2, \gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} \leq \langle f_1 - f_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \rangle_{V^* \times V}.$$

Comme J satisfait la condition de monotonie relaxée, on obtient

$$(\zeta_1 - \zeta_2, \gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^s)} \geq -m_j c_e^2 \|\gamma\|^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2.$$

Par conséquent, des deux inégalités précédentes, nous obtenons que

$$(m_A - m_j c_e^2 \|\gamma\|^2) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \leq \|f_1 - f_2\|_{V^*} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V.$$

Maintenant, par (2.3.3) on en déduit que l'inégalité (2.3.4) est satisfaite, ce qui conclut la preuve.

Chapitre 3

Analyse du problème de contact statique

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux élastiques dans un processus quasi-statique. Le contact est modélisé par une compliance normale sans frottement et est associé à sous-différentielle des surfaces de contact. Le problème se formule comme formé par une inéquation hémivariationnelle elliptique par rapport au champ de déplacement. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations hémivariationnelles, et des arguments de point fixe.

3.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses

Nous supposons que le processus est statique, que le matériau est élastique et que les forces et tractions externes ne dépendent pas du temps. Rappelons que le corps élastique occupe un ensemble connexe ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, supposé Lipschitz continu. On suppose également que Γ se compose de trois ensembles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , avec des ensembles relativement ouverts mutuellement disjoints Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , tels que $meas(\Gamma_1) > 0$. Le modèle classique pour le processus est le suivant.

problème P_1 . Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \quad (3.1.1)$$

$$\text{Div } \sigma + \mathbf{f}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T); \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \quad (3.1.3)$$

$$\sigma \nu = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T); \quad (3.1.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu(t) \in j_\nu(t, \mathbf{u}_\nu(t)), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T); \quad (3.1.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T); \quad (3.1.6)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.7)$$

Les équation (3.1.1) représentent la loi de comportement élastique, où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes, \mathbf{u} représente le champ de déplacement, \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité. (3.1.2) est l'équation d'équilibre. Les conditions (3.1.3) et (3.1.4) sont les conditions aux limites de déplacement et de traction, respectivement. L'inclusion (3.1.5) représente la condition de compliance normale de condition de contact qui peut être exprimé sous la forme sous-différentielle, où j_ν est une fonction donnée, le symbole ∂j_ν désigne le sous-différentiel de Clarke de j_ν . (3.1.6) indique que le contact est sans frottement, c'est-à-dire que la contrainte tangentielle disparaît sur la surface de contact pendant le processus. Dans (3.1.7) \mathbf{u}_0 est le déplacement initial du matériau.

Nous introduisons présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée par

$$V = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1.\}$$

Comme $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vérifiée, donc il existe une constante $C_k > 0$, qui dépend uniquement de Ω et Γ_1 , telle que:

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)} \quad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans [3, 5]. L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V$$

Il vient que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et par conséquent, $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le Théorème de trace de Sobolev il existe une constante C_0 dépend uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Dans l'étude du problème P_1 , on considère les hypothèses suivantes.

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times S^d \longrightarrow S^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } a_0 \in L^2(Q), a_0 \geq 0 \text{ et } a_1 > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(x, \varepsilon)\|_{S^d} \leq a_0(x) + a_1 \|\varepsilon\|_{S^d} \quad \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2), (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)) \geq m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{S^d}^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \quad \text{p.p } x \in \Omega. \\ (c) \text{ } x \longrightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ Pour tout } \varepsilon \in S^d. \\ (d) \text{ } \varepsilon \longrightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est continue sur } S^d \text{ Pour p.p } x \in \Omega. \\ (e) \mathcal{F}(x, 0) = 0 \text{ Pour p.p } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1.8)$$

La fonction $j_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } c_{0\tau}, c_{1\tau} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\partial j_\tau(x, \xi)| \leq c_{0\tau} + c_{1\tau} |\xi| \quad \text{Pour tout } \xi \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ (b) \text{ Il existe } m_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\zeta_1 - \zeta_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq -m_\tau |\xi_1 - \xi_2|^2 \quad \text{Pour tout } \zeta_i \in \partial j_\nu(x, r_i), \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ Il existe } c_{2\nu} \geq 0 \text{ tel que} \\ \quad j_\tau^0(x, \xi; -\xi) \leq c_{2\nu} (1 + |\xi|) \quad \text{Pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ (d) \text{ } (x) \longrightarrow j_\nu(x, \xi) \text{ est mesurable sur } \Sigma_3 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \text{ et } j_\tau(x, 0) \in L^1(\Gamma_3). \\ (e) j_\nu(x, \cdot) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R} \text{ pour p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.1.9)$$

nous supposons que les forces volumiques \mathbf{f}_0 et les tractions surfaciques \mathbf{f}_2 ont la régularité

$$f_0 \in L^2(0, T; V^*) \quad , \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)) \quad (3.1.10)$$

enfin, les données initiales ont la régularité

$$u_0 \in V. \quad (3.1.11)$$

On définit la fonction $f : (0, T) \longrightarrow V^*$ par

$$(f(t), \mathbf{v})_{V^* \times V} = (f_0(t), \mathbf{v})_H + (f_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)} \quad \text{pour } \mathbf{v} \in V \text{ et p.p. } t \in (0, T). \quad (3.1.12)$$

Pour présenter la formulation variationnelle du problème 7.1, nous utilisons les espaces

$$\begin{aligned} H &= \{ \mathbf{u} = (\mathbf{u}_i) \mid \mathbf{u}_i \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \\ \mathcal{H} &= \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \text{ pour } i, j = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega, S_d) \\ \mathcal{H}_1 &= \{ \sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \sigma \in H \} \end{aligned}$$

et on rappelle que suivant la formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \sigma, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \text{for } \sigma \in \mathcal{H}_1, \mathbf{v} \in H_1. \quad (3.1.13)$$

Ensuite, nous présentons la formulation variationnelle du problème P^7 .

3.2 Formulation variationnelle

On Supposons que $\{u, \sigma\}$ soient des fonctions suffisamment lisses qui résolvent (3.1.1)-(3.1.7). Nous utilisons l'équation d'équilibre (3.1.2) et la formule de Green (3.1.13) pour trouver que

$$(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), \mathbf{v})_H + \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot \mathbf{v} da, \quad (3.2.1)$$

Ensuite, nous décomposons l'intégrale de bord sur Γ_1, Γ_2 et $\sigma \nu \cdot \mathbf{v}$, et, puisque $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a.e. sur Γ_1 , $\sigma \nu = f_2$ sur Γ_2 , et

$$\sigma \nu \cdot \mathbf{v} = \sigma_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \sigma_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau} \quad \text{on } \Gamma_3$$

on en déduit que

$$(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), \mathbf{v})_H + (f_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)} + \int_{\Gamma_3} (\sigma_{\nu}(t) \mathbf{v}_{\nu} + \sigma_{\tau}(t) \cdot \mathbf{v}_{\tau}) da \quad (3.2.2)$$

D'autre part, à partir de la définition de la sous-différentielle de Clarke combinée avec (3.1.5), on a

$$-\sigma_{\nu}(t) \mathbf{v}_{\nu} \leq j_{\nu}^0(\dot{u}_{\nu}(t); \mathbf{v}_{\nu}), \quad \text{sur } \Sigma_3,$$

ce qui implique que

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu(t) \mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau(t) \cdot \mathbf{v}_\tau) da \geq - \int_{\Gamma_3} j_\nu^0(t, \dot{u}_\nu(t); \mathbf{v}_\nu) da \quad (3.2.3)$$

Nous combinons maintenant (3.2.1)-(3.2.3) pour voir que

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \int_{\Gamma_3} j_\tau^0(\dot{u}_\nu(t); \mathbf{v}_\nu) da \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V^* \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

où la fonction $\mathbf{f} : (0, T) \rightarrow V^*$ est donné par (3.1.12).

problème PV Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tels que:

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \int_{\Gamma_3} j_\nu^0(t, \dot{u}_\nu(t); \mathbf{v}_\nu) da \\ & \geq (f(t), \mathbf{v})_{V^* \times V} \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (3.2.6)$$

3.3 L'existence et l'unicité de la solution

Notez que, contrairement aux formulations variationnelles des problèmes de contact frictionnel étudiés précédemment, le problème P^1 représente un inéquations variationnelles elliptique.

Dans l'étude du problème PV nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 Nous supposons que les hypothèses (3.1.8)- (3.1.9) et (3.1.11) sont satisfaites, si l'hypothèse de petitesse

$$\text{soit } j_\nu(x, \cdot) \text{ et } -j_\nu(x, \cdot) \text{ sont réguliers pour p.p. } x \in \Gamma_3 \quad (7.3.1)$$

et, en plus,

$$m_{\mathcal{F}} > c_{2\tau} c_e^2 \|\gamma\|^2. \quad (7.3.2)$$

est vérifiée, alors le problème PV a une unique solution satisfaisant

$$\mathbf{u} \in V \quad (7.3.3)$$

Démonstration. Démonstration Théorème 3.3.1 découle du Théorème 2.3.1 page 25.

Pour la fournir, nous introduisons l'opérateur $A : V \rightarrow V^*$ défini par

$$\langle Au, v \rangle_{V^* \times V} = (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}(t)))_{\mathcal{H}}$$

et la fonction $j : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$j(x, \xi)_{V' \times V} = j_\nu(x, \xi_\nu)_H \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_3, \xi \in \mathbb{R}.$$

l'opérateur A et la fonction j , satisfont hypothèses (2.3.1) et (2.3.2) respectivement .
On applique maintenant le Théorème 2.3.1 avec $f \in V^*$ donné par (3.1.12) et on en déduit que le problème PV a une unique solution , ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

- [1] H. Brézis, Equations et Inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), 115-175.
- [2] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl. (9), 51 (1972), pp. 1–168.
- [3] K. CHADI, M. SELMANI , "*Dynamic frictional thermoviscoelastic contact problem with normal compliance and damage*"; **Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin**, Volume 28, No 2, pp. 195 - 215, (2021).
- [4] F. H. CLARKE, " *Generalized gradients and applications*"; Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 247–262.
- [5] G. DUVAUT, J.L.LIONS , "*Inequalities in mechanics and physics*"; Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [6] W. HAN, S. MIGÓRSKI, AND M. SOFONEA , "*Analysis of a general dymamic history-dependent variational-hemivariational inequality*"; **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, Volume 36, pp. 69-88 (August 2017).
- [7] Y. LI, Z. LUI , "*A quasistatic contact problem for viscoelastic materials with friction and damage*"; **Nonlinear Analysis**, Volume. 73, pp. 2221–2229,(2010).
- [8] S. MIGÓRSKI, A. OCHAL, "*Boundary hemivariational inequality of parabolic type*"; **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications** Volume 57, Issue 4, Pages 579-596 (May 2004).

- [9] S. MIGÓRSKI, A. OCHAL, AND M. SOFONEA , "*Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*"; **Advances in Mechanics and Mathematics**, Volume.26, Springer, NewYork,2013.
- [10] Z. Naniewicz and P. D. Panagiotopoulos, *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [11] P. D. Panagiotopoulos, Nonconvex problems of semipermeable media and related topics, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 65 (1985), pp. 29–36.
- [12] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [13] P. D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [14] M. Shillor, M. Sofonea, and J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Phys. 655, Springer, Berlin, 2004.
- [15] M. SOFONEA, W. HAN, SHILLOR. "*Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*"; Pure Appl. Math. 276, Chapman-Hall / CRC Press, New York (2006).
- [16] M. SOFONEA, AND S. MIGÓRSKI. "*Variational- Hemivariational Inequalities with Applications*"; Pure and Applied. Math, Chapman-Hall / CRC (2017).